

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
 تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
 الاصلاح على الموقع : l'apothème

I – مقارنة عددين حقيقيين :**(1) – خاصية :**

a و b عدنان حقيقيان .

$$a \leq b \quad \text{يعني} \quad a - b \in \mathbb{R}^-$$

$$a \geq b \quad \text{يعني} \quad a - b \in \mathbb{R}^+$$

(2) – أمثلة :

(1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

$$(2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) = 2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+5$$

$$= 2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4 \quad \text{لدينا :}$$

$$= \sqrt{3}+1$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1 \geq 0$ فإن : $(2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) \geq 0$ و منه فإن :

$$\underline{2\sqrt{3}-4 \geq \sqrt{3}-5}$$

(2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x = y - 3$.

$$\text{لدينا : } x - y = -3$$

و بما أن : $-3 \leq 0$ فإن : $x - y \leq 0$ وبالتالي : $\underline{x \leq y}$

II – الترتيب و العمليات :

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ فإن $a+c \leq b+c$

إذا كان $a \leq b$ فإن $a+c \leq b+c$

(1) – الترتيب و الجمع :

(أ) - خاصية ① :

* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x < 3$.

لنقارن العددين -2 و $x-5$.

$$x + (-5) < 3 + (-5)$$

لدينا : $x < 3$ يعني أن :

$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن : $x - 5 < -2$

(ب) - خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ و فإن $a+c \leq b+d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x < 3$ و $2 > y$.

لنبين أن : $x + y < 5$.

$$\left. \begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array} \right\} \text{ يعني أن } \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array} \right\} \text{ لدينا :}$$

$$x + y < 3 + 2 \quad \text{ إذن :}$$

و بالتالي فإن : $x + y < 5$

(2) – الترتيب و الضرب :

(أ) - خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

$a \leq b$ و $c < 0$ يعني $a \times c \leq b \times c$

$a \leq b$ و $c > 0$ يعني $a \times c \geq b \times c$

* مثال :

◇ نفترض : $a \leq \sqrt{5} + 1$ برهن أن $(\sqrt{5} - 1)a \leq 4$.

لدينا $\sqrt{5} - 1 \in \mathbb{R}^+$ و $a \leq \sqrt{5} + 1$ إذن

$$\underbrace{(\sqrt{5} - 1)a}_{\leq 4} \leq \underbrace{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}_4$$

ومنه $(\sqrt{5} - 1)a \leq 4$

◇ نفترض : $a < 2\sqrt{3}$ برهن أن $-\sqrt{3}a > -6$

لدينا $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$ و $a < 2\sqrt{3}$ إذن $-\sqrt{3}a > \underbrace{-\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}_{-6}$ ومنه

$$\underline{-\sqrt{3}a > -6}$$

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة.

(ب) - خاصية ② :

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ إذا كان } \left. \begin{array}{l} \text{و} \\ \text{فإن } a \times c \leq b \times d \end{array} \right\}$$

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array} \right\} \text{ إذن } x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$

$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$

$$xy < 2\sqrt{18}$$

$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$

$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

$$xy < 6\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن :

(3) – الترتيب و المقلوب :(أ) - خاصية :. a و b عدنان حقيقيان موجبان قطعاً .

$$\text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$\text{إذا كان } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ فإن } a \leq b$$

(ب) - مثال : لدينا : $5 \leq 20$ لكن

$$0,2 \geq 0,05 \quad ; \quad \frac{1}{20} = 0,05 \quad ; \quad \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\frac{1}{5} \geq \frac{1}{20} \quad \text{لكن} \quad 5 \leq 20$$

(4) – الترتيب و المربع :. a و b عدنان حقيقيان موجبان .(أ) - خاصية ① :

$$\text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } a^2 \leq b^2$$

$$\text{إذا كان } a^2 \leq b^2 \text{ فإن } a \leq b$$

* مثال :

$$5 \leq 11 \text{ ولدينا } 11^2 = 121 \quad ; \quad 5^2 = 25 \text{ ونلاحظ ان } 25 \leq 121$$

$$50 \geq 49 \text{ ولدينا اي } (5\sqrt{2})^2 \geq 7^2 \text{ ومنه } 5\sqrt{2} \geq 7$$

(ب) - خاصية ② :. a و b عدنان حقيقيان سالبان .

$$\text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } a^2 \geq b^2$$

$$\text{إذا كان } a^2 \geq b^2 \text{ فإن } a \leq b$$

* مثال :

$$\text{لنقارن العددين : } -\sqrt{6} \text{ و } -3\sqrt{2} .$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array} \right\} \text{و}$$

إذن $\sqrt{6}^2 \leq (3\sqrt{2})^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي

$$\underline{-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}} \quad \text{فإن :}$$

(5) – الترتيب و الجذر التربيعي :

(أ) - خاصية :

a و b عدنان حقيقيان موجبان .

$$\text{إذا كان } a \leq b \quad \text{فإن } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

$$\text{إذا كان } \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \quad \text{فإن } a \leq b$$

* أمثلة :

$$(1) - \text{لنقارن العددين : } \sqrt{10} \text{ و } 3\sqrt{3} .$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{10} = \sqrt{10} \\ 3\sqrt{3} = \sqrt{9} \sqrt{3} = \sqrt{27} \end{array} \right\} \text{و}$$

لدينا $10 < 27$ و منه فإن $\sqrt{10} < \sqrt{27}$ اي $\sqrt{10} < 3\sqrt{3}$

III – الحصر :

(1) – حصر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$$z \leq b \leq t \quad \text{و} \quad x \leq a \leq y$$

$$x + z \leq a + b \leq y + t$$

* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

$$\text{لنحصر } x + y .$$

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\underline{-1 \leq x + y \leq 10} \quad \text{إذن :}$$

(2) – حصر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \leq a \leq y$

سيكون لدينا : $-y \leq -a \leq -x$

(3) – حصر فرق عددين حقيقيين :

ملاحظة هامة : لحصر $a-b$ ، نكتب $a-b = a+(-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$ ؛ لنحصر $x-y$.

لدينا : $-2 \leq -y \leq 4$ و $3 \leq x \leq 8$ إذن : $3-2 \leq x+(-y) \leq 8+4$

و منه فإن : $1 \leq x-y \leq 12$

(4) – حصر جداء عددين حقيقيين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$z \leq b \leq t$ و $x \leq a \leq y$

$x \times z \leq a \times b \leq y \times t$

* مثال 1 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $1 \leq y \leq 3$ ؛ لنحصر $x \times y$.

لدينا : $3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$ إذن : $3 \leq x \times y \leq 21$

* مثال 2 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $-5 \leq x \leq -2$ و $3 \leq y \leq 6$ ؛ لنحصر $x \times y$.

لدينا : $2 \leq -x \leq 5$ إذن : $2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$ أي

$6 \leq -xy \leq 30$

و منه فإن : $-30 \leq xy \leq -6$.

(5) – حصر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

استنتاج :

أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس العلامة

و حيث : $x \leq a \leq y$ لدينا : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$ (6) – حصر خارج عددين :ملاحظة هامة : لخصر $\frac{a}{b}$ ، نكتب $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه*مثال : x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $5 \leq y \leq 9$ ؛ لنخصر $\frac{x}{y}$.لدينا : $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$ إذن : $3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$ أي $\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$ وبالتالي فإن : $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$ * تمرين تطبيقي محوصل : a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $6 \leq a \leq 8$ و $-4 \leq b \leq -2$ و $-3 \leq c \leq 5$ أخصر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحل :

(1) – خصر a^2 .لدينا : $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$ و منه فإن : $36 \leq a^2 \leq 64$ (2) – خصر b^2 .لدينا : $(-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2$ و منه فإن : $4 \leq b^2 \leq 16$ (3) – خصر $a+2b-4c$.لدينا : $-8 \leq 2b \leq -4$ و $-4 \times (-3) \leq -4c \leq -4 \times 5$ أي $12 \leq -4c \leq 20$

$$6 + (-8) + 12 \leq a + 2b - 4c \leq 8 + (-4) + 20 \quad \text{إذن :}$$

$$\underline{10 \leq a + 2b - 4c \leq 24} \quad \text{و منه فإن :}$$

$$(4) - \text{حصر } \frac{a+b}{b^2}$$

$$\text{لدينا : } 6 + (-4) \leq a + b \leq 8 + (-2) \quad \text{أي } 2 \leq a + b \leq 6 \quad \text{و } \frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{إذن : } 2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4} \quad \text{أي } \frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$$

$$\underline{\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$



خطأ شائع

$$-4x \leq 12 \Rightarrow x \leq \frac{12}{-4} \Rightarrow x \leq -3 \quad \text{اصح الخطأ} \quad (1)$$

$$x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2 \quad \text{مثال : } -5 < 2 \quad \text{لكن } 25 > 4 \quad \text{اصح الخطأ} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a' \leq x' \leq b' \end{array} \right\} \Rightarrow a - a' \leq x - x' \leq b - b' \quad \text{اصح الخطأ} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a' \leq x' \leq b' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{a'} \leq \frac{x}{x'} \leq \frac{b}{b'} \quad \text{الاعداد } a \text{ و } b \text{ و } a' \text{ و } b' \text{ موجبة قطعاً} \quad (4)$$

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
 تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغزبي "
 الاصلاح على الموقع : l'apothème

تمارين

تمارين 1: ◇

قارن العددين a و b في كل حالة من الحالات الآتية :

$-4\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}+1$	$\sqrt{5}+1$	$2\sqrt{7}$	$-\frac{16}{11}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{21}{3}$	$5+2\sqrt{2}$	a
$-3\sqrt{2}$	$7+\sqrt{2}$	$\sqrt{7}+2$	$3\sqrt{3}$	$-\frac{11}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{5}{11}$	$5+\sqrt{10}$	b
.....	$a > b$...	المقارنة
$\frac{3\sqrt{2}}{5}$	$2\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$	0,1	$\frac{21}{33}$	$5-2\sqrt{2}$	a
$\frac{\sqrt{7}}{5}$	2,12	$\frac{5}{2}$	$-4\sqrt{2}$	$\frac{-2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{20}{33}$	$5-\sqrt{13}$	b
.....	$a < b$	المقارنة

تمارين 2: ◇

نعتبر عددين حقيقيين موجبين قطعاً a و b حيث $a < b$. قارن بين :

$$1. \quad \frac{2}{3}a-1 \quad ; \quad \frac{5}{4}b+2$$

$$2. \quad 5a+3b \quad ; \quad 2a+6b$$

$$3. \quad a^2-b \quad ; \quad b^2-a$$

$$4. \quad 4ab-1 \quad ; \quad 4a^2+b^2$$

تمارين 3: ◇

1. x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x \leq y$. أثبت أن :

$$x + \sqrt{5} \leq y + \sqrt{7} \quad ; \quad x - \sqrt{11} \leq y + \sqrt{2} \quad ; \quad x\sqrt{7} \leq 3y\sqrt{2}$$

$$2x + \frac{1}{\sqrt{7}} \leq 3y + \frac{1}{\sqrt{5}} ; \quad \frac{x}{2\sqrt{5}} \leq \frac{y}{3\sqrt{2}}$$

2. a و b عدنان حقيقيان بحيث : $a > b$. بين أن :

$$-7a + 4b < -3b ; \quad a > b - \frac{\sqrt{7}}{2} ; \quad 5a > 3a + 2b ; \quad 5a > 4a + b$$

$$a\sqrt{2} + b > b(\sqrt{2} + 1)$$

◇ تمرين 4:

a و b عدنان حقيقيان بحيث : $a \geq -12$ و $b \leq 5$. بين أن :

$$b + \frac{3}{4} \leq \frac{23}{4} ; \quad a - 1,5 \geq -13,5 ; \quad b - 7 \leq -2 ; \quad a + \frac{1}{2} \geq \frac{-23}{2}$$

$$-\frac{4}{3}b \geq -\frac{20}{3} ; \quad -3a \leq 36 ; \quad \frac{7}{5}b \leq 7 ; \quad \frac{1}{2}a \geq -6$$

$$b - a \leq 17 ; \quad a - b \geq -17$$

◇ تمرين 5:

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $\frac{2}{5} \leq x \leq 1$ و $-5 \leq y \leq \frac{3}{2}$

أحصر ما يلي : $x + \frac{7}{5}$; $y - \frac{1}{2}$; $x - \frac{6}{11}$; $y + \frac{3}{5}$

$$5x$$
 ; $-\frac{7}{5}x$; $2y$; $\frac{-3}{2}y$

$$2x - 3y$$
 ; $x - y$; $3x + 5y$; $x + y$

$$-3x + y + \frac{1}{2}$$
 ; $-x - 2y - 22$; $3x + 5y + 11$

$$\frac{3x - 5y + 4}{-2}$$
 ; $\frac{-2x + y}{-3} + 1$; $\frac{x + y}{2}$

◇ تمرين 6:

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x < y$ ؛ أثبت أن : $x < \frac{x+y}{2} < y$ و أن : $x < \frac{2x+3y}{5} < y$.

◇ تمرين 7:

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $a+c \leq b$.

بين أن : $a \leq b-c$ و $a+c-b \leq 0$ و $a+2c \leq b+c$ و $2a \leq a+b-c$

◇ تمرين 8:

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x \leq 5$ و $y \geq 2$ ؛ أثبت أن :

$$2x - 1 \leq 9 ; 3x + 5 \geq -1 ; 7 - x \geq 2 ; 11 - 2y \leq 7 ; 2x - 4y \leq 2$$

$$\frac{5x+1}{4} \leq 4 ; \frac{6y-2}{7} \geq -2 ; \frac{-5x+y}{6} \geq \frac{-9}{2}$$

◇ تمرين 9:

نعتبر عددين حقيقيين موجبين قطعاً a و b حيث $a < b$. قارن بين :

$$1 - \frac{ab}{a+b} ; \frac{a+b}{4}$$

$$2 - \frac{2}{2a+6b} ; \frac{\pi}{5a+3b}$$

$$3 - \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{b}} ; \frac{5}{\sqrt{a}}$$

$$4 - b(\sqrt{13}-a) ; a(\sqrt{13}-b)$$

◇ تمرين 10:

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين :

$$a = \frac{12\sqrt{2}-18}{\sqrt{18}} \quad \text{و} \quad b = \sqrt{14} + \sqrt{45} - \sqrt{20} - 3\sqrt{5}$$

$$1- \text{بين ان } a = 2 - 1,5\sqrt{2} \quad \text{و} \quad b = \sqrt{14} - 2\sqrt{5}$$

ب- ماهي علامة كل من a و b ؟ علل جوابك.

- ت- احسب a^2 و b^2 .
 ج- قارن بين a^2 و b^2 ثم استنتج مقارنة بين a و b .

◇ تمرين 11:

a و b و x أعداد حقيقية موجبة قطعاً.

(1) - بين أن : $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

(2) - استنتج أن : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ وأن $(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

◇ تمرين 12:

x و y عدنان حقيقيان موجبان قطعاً بحيث : $x + \frac{1}{y} \geq 2$ و $y + \frac{1}{x} \geq 2$ و $x + y = 1$.

(1) - بين أن : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3$.

(2) - استنتج أن : $xy \leq \frac{1}{3}$.

◇ تمرين 13:

a و b عدنان حقيقيان موجبان .

(1) - بين أن : $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$.

(2) - استنتج مقارنة العددين : $\frac{a+b}{2}$ و \sqrt{ab} .

◇ تمرين 14:

a و b عدنان حقيقيان موجبان حيث $a < b$. اختصر العبارات التالية :

الاختصار	العبارة
	$H = 2(a-b) - 3 + b + a - 1$
	$K = -a + b + 7 + b - a $
	$L = \sqrt{(a+b+1)^2} + -a-6 $

◇ تمرين 15:

a و b و c أعداد حقيقية موجبة .

(1) - بين أن : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

(2) - استنتج أن : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

◇ تمرين 16:

a و b عدنان حقيقيان موجبان حيث $a < b$.

(أ) بين ان $a^2 < ab < b^2$.

(ب) استنتج ان $a < \sqrt{ab} < b$.

(ت) بين اذن ان $\frac{113}{27} < \sqrt{35} < \frac{945}{113}$

◇ تمرين 17:

x عدد حقيقي ؛ اكمل الجدول التالي بـ $<$ او $>$:

$-\frac{7}{2} + \frac{2}{3}x$...	$\frac{2}{3}x - \frac{8}{7}$	$\frac{3}{5}x + \frac{7}{6}$...	$\frac{3}{5}x + \frac{3}{2}$	$x + \sqrt{7}$...	$x + 2,3$
-------------------------------	-----	------------------------------	------------------------------	-----	------------------------------	----------------	-----	-----------

◇ تمرين 18:

نعتبر x و y عددين حقيقيين بحيث : $x \geq 5$ و $y \geq -1$ ؛ أثبت أن :

$$-3x - \frac{1}{2}y + 5 \leq \frac{-19}{2} \quad ; \quad \frac{x+y}{2} \geq 2 \quad ; \quad -5x - 3y \leq -22 \quad ; \quad 2x + 7y \geq 3$$

◇ تمرين 19:

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $2 \leq a \leq 5$ و $-3 \leq b \leq -1$ و $-2 \leq c \leq 3$

العبارة	$a^2 + b - c$	$-2a + \frac{3}{4}$	$5a - 2b + 5c$	$-4c - 1$	$\frac{3a + 2b}{3}$	$\frac{-a + b(c + 3)}{2}$
الحصر						

◇ تمرين 20:

نعتبر x و y عددين حقيقيين بحيث : $-9 \leq 2x + 3 \leq 7$ و $-\frac{7}{2} \leq \frac{3y - 1}{2} \leq -2$.
 أثبت أن : $-6 \leq x \leq 2$ و $-2 \leq y \leq -1$

◇ تمرين 21:

نعتبر x و y عددين حقيقيين بحيث : $x \geq 1$ و $y \geq 1$.

(1) - بين أن : $xy \geq x$ و $xy \geq y$

(2) - استنتج أن : $x + y \leq 2xy$

(3) - قارن اذن بين $\sqrt{8} + \sqrt{12}$ و $8\sqrt{6}$.

◇ تمرين 22:

a و b عددا حقيقيان بحيث : $a \leq b$.

(1) - أثبت أن : $2a \leq a + b \leq 2b$

(2) - استنتج أن : $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$

◇ تمرين 23:

a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $a \leq b$.

$$(1) - \text{برهن أن : } \frac{a+c}{b+c} \leq 1$$

$$(2) - \text{قارن اذن بين : } 1 \text{ و } \frac{\pi+4\sqrt{2}}{5+\sqrt{32}}$$

◇ تمرين 24:

a و b عدنان حقيقيان.

$$(1) - \text{قارن العددين : } 4ab \text{ و } (a+b)^2 \text{ ، ثم استنتج أنه إذا كان } a+b=1 \text{ فإن : } ab \leq \frac{1}{4}$$

$$(2) - \text{قارن العددين : } -4ab \text{ و } (a-b)^2 \text{ ، ثم استنتج أنه إذا كان } a-b=1 \text{ فإن : } ab \geq -\frac{1}{4}$$

◇ تمرين 25:

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين : $q = \sqrt{98} - \sqrt{18}$ و $p = 3 - \sqrt{5}^2 - 2.5 - \sqrt{45}$

$$\text{أ- بين ان } p=9 \text{ و } q=4\sqrt{2} .$$

$$\text{ب- ليكن العدد الحقيقي } t=9+4\sqrt{2} \text{ ؛ بين أن } t-13=4(\sqrt{2}-1) \text{ ثم استنتج أن } t > 13 .$$

$$\text{ج- بين ان } t=1+2\sqrt{2}^2 \text{ ثم استنتج مقارنة بين } 1+2\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{13} .$$

$$\text{د- بين ان } \frac{1+2\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{13}}{\pi}$$

◇ تمرين 26:

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $2 \leq x \leq 7$ و $-7 \leq y \leq -1$ و $-5 \leq z \leq 3$

اجب بـ "خطأ" أو "صواب"

$0,4 \leq \frac{x(z+6)}{5} \leq 12,6$	$-49 \leq xy \leq -2$	$-35 \leq -2x + 3y \leq -7$	$9 \leq x - y \leq 8$	$-5 \leq x + y \leq 6$
---------------------------------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------	------------------------

◇ تمرين 27:

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $6 \leq x \leq 8$ و $-5 \leq y \leq -2$

العبارة	الحصر
$x + y$	$1 \leq x + y \leq 6$
$x - y$	
xy	
$\frac{x}{y}$	
x^2	
y^2	
$(x + y)^2$	$1^2 \leq (x + y)^2 \leq 6^2$ أي
$(x - y)^2$	
$(x - y)(x + y)$	

◇ تمرين 28:

x عدد حقيقي ؛ أوجد حصرا للعدد x في كل حالة من الحالات الآتية :

$$-4 \leq 2x + 3 \leq 5 \quad ; \quad -11 \leq 5 - 2x \leq -2$$

$$5 \leq 7x - 1 \leq 12 \quad ; \quad -1 \leq \frac{4x - 1}{2} \leq 7$$

◇ تمرين 29:

a و b عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq a \leq 6$ و $-5 \leq b \leq -3$.

(1) - أوجد حصرا لـ $a + b$ و a^2 .

(2) - بين أن : $-60 \leq 2ab \leq -18$ وان $9 \leq b^2 \leq 25$.

(3) - لماذا لا يمكن حصر $(a+b)^2$ ؟

(4) - بين أن : $-51 \leq a^2 + 2ab \leq 18$.

(5) - استنتج من خلال (2) و (4) أن : $0 \leq (a+b)^2 \leq 43$.

(6) - أحصر : $a^2 - b^2$.

◇ تمرين 30:

a و b عدنان حقيقيان موجبان . برهن أن : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

◇ تمرين 31:

نعتبر العددين الحقيقيين التاليين : $a = \sqrt{45} - (\sqrt{20} - 1)$ و $b = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{24}}{\sqrt{6}}$.

أ- بين أن : $a = \sqrt{5} + 1$ و $b = \sqrt{3} + 2$.

ب- احسب a^2 و b^2 .

ج- قارن بين $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{3}$ ثم استنتج مقارنة بين a^2 و b^2 .

د- بين أن : $a < b$ ثم استنتج مقارنة بين $\frac{\sqrt{5}}{a+1}$ و $\frac{2}{b+\pi}$.

هـ- بين أن : $|a-4| - |a-b| + |b-3| = 1$.

◇ تمرين 32:

نعتبر العدد الحقيقي a حيث : $-1 \leq a \leq 3$.

1. بين أن : $|-a+4| - |a-5| = -1$.

2. انشر العبارة $(-a+4)(a-5)$ ثم استنتج حصر لـ $a^2 - 9a + 20$.

3. فكك العبارة $a^2 + 4a + 4$ ثم استنتج أن : $-3 \leq a^2 + 4a \leq 21$.

4. لتكن العبارة $A = \frac{2a-1}{a+2}$.

أ- بين أن $(a+2) \neq 0$.

ب- اثبت أن $2 - \frac{5}{a+2} = A$ واستخلص حصرًا للعبارة A .

◇ تمرين 33:

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين .

(أ) أنشر العبارة : $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$.

(ب) قارن \sqrt{ab} و $\frac{a+b}{2}$.

(ج) تحقق من مقارنتك في حالة أن : $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(د) متى يكون : $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ ؟

◇ تمرين 34:

x عدد حقيقي موجب قطعاً .

أ - قارن بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{x+2}$ ثم بين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{x+3}$.

ب - إستنتج أن $\frac{6}{(x+2)(x+3)} < 1$.

◇ تمرين 35:

نعتبر العددين الحقيقيين a و b بحيث $a > 1$ و $b > 1$ و $a > b$.

رتب تنازلياً الأعداد : $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+1}{b+1}$ و $\frac{a-1}{b-1}$.

◇ تمرين 36:

حقل مستطيل الشكل طوله محصور بين 12 m و 14 m و عرضه محصور بين 7 m و 10 m .

(1) - أعط حصراً المحيط هذا المستطيل .

(2) - أعط حصراً لمساحة هذا المستطيل .

◇ تمرين 37:

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين : $a = 3\sqrt{20} - \sqrt{54} + 2\sqrt{24} - \sqrt{125}$ و $b = 3\left(\frac{5-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}\right)^{-1}$.

1. بين ان : $a = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ و $b = 2 + \sqrt{7}$.
2. احسب a^2 و b^2 ثم قارنهما .
3. استنتج مقارنة لـ a و b ثم لـ $\frac{3}{a}$ و $\frac{\pi}{b}$.
4. قارن بين: $\frac{4}{a+b}$ و $\frac{a+b}{ab}$.

◇ تمرين 38:

ABC مثلث متقايس الاضلاع طول ضلعه $5t\sqrt{6}$ cm ؛ ما هو الشرط على t حتى لا يتجاوز الارتفاع القيمة $15\sqrt{2}$ cm ؟

◇ تمرين 39:

- دائرة شعاعها r بحيث $5 \leq r \leq 7$ بالصم .
- 1) اوجد حصرا لـ \mathcal{L} محيط الدائرة اذا افترضنا ان $3,14 \leq \pi \leq 3,15$.
 - 2) اوجد حصرا لـ \mathcal{A} مساحة الدائرة اذا افترضنا ان $3 \leq \pi \leq 4$.

◇ تمرين 40:

a و b و c أعداد حقيقيان موجبان قطعاً.

$$(1) - \text{برهن أن : } \frac{a+b}{4} \geq \frac{ab}{a+b} .$$

$$(2) - \text{استنتج أن : } \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
 تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
 الاصلاح على الموقع : l'apothème